

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЙ ЧЕБЫШЕВА

Многие технические, экономические и физические системы описываются нелинейными уравнениями в частных производных гиперболического или параболического типа. Указанные уравнения моделируют волновые явления в нелинейных средах. Их исследование представляет большой эвристический интерес и возможно только с применением вычислительной техники. Описаны численные методы и алгоритмы для пространственно-временных уравнений указанного типа с различными видами нелинейности. Рассматриваемая спектрально-разностная численная схема использует методику коллокации на основе представления искомым функций в виде разложений по полиномам Чебышева. Получающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения по времени решаются при помощи схем Рунге–Кутты, либо Адамса высокого порядка точности. С привлечением системного подхода рассматриваются некоторые приложения.

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения в частных производных, численные методы, системный подход, самоканалирование, самомодуляция, солитоны.

A. V. Borovsky

NONLINEAR SYSTEMS STUDY BY MEANS OF SPECTRAL  
NUMERICAL METHOD USING CHEBYSHEV'S EXPANSIONS

Many technical, economical and physical systems are described by partial derivative nonlinear equations of hyperbolic or parabolic types. The equations simulate wave phenomena in nonlinear matter. Their study is of great heuristic interest and can be carried out only by means of computations. The article describes numerical methods and algorithms for space-time equations of the considered types with various nonlinearities. The studied spectral-difference numerical scheme uses the collocation technique based on representing the unknown functions in the form of Chebyshev's multinomial expansions. The derived ordinary differential time equations are solved via Runge-Kutte schemes or Adams high precision net schemes. The systemic approach is used to study some applications.

*Keywords:* partial differential equations, numerical methods, systemic approach, self channeling, self modulation, solitons.

Во многих технических, физических и экономических приложениях приходится исследовать нелинейное волновое уравнение или его модификации. Такое уравнение описывает распространение волн в средах, свойства которых волна сама же и изменяет. При этом возникает совокупность эффектов, характерных для волновых явлений. К числу таких явлений можно отнести:

- рефракцию волны, т.е. медленное изменение направления ее распространения в пространстве;
- дифракцию волны, т.е. перераспределение энергии волны перпендикулярно ее волновому вектору, сопровождающееся усилением расходимости волны;

- самофокусировку или самоканалирование волны, т.е. ее локализацию в малой пространственной области;
- возникновение устойчивой к распаду уединенной волны — солитона;
- самомодуляцию волны, т.е. ее распад на несколько взаимодействующих волн-солитонов. Такой распад может происходить в поперечном, либо продольном направлении. В связи с этим применяют термины — пространственная, либо временная самомодуляция.

Теорию линейного волнового уравнения разработали в IX–XX вв. классики науки Дж. Грин [14], Кирхгофф [16], Зоммерфельд [8], Франк [13], Борн и Вольф [2], Фок [12]. Наиболее сложными оказались краевые задачи для ограниченных областей, некоторые из которых не решены до сих пор.

Теория нелинейного волнового уравнения (НВУ) многократно сложнее. Свое начало она берет с появления лазерной физики. Первые НВУ и их упрощения в виде параболических уравнений рассматривались в работах Г.А. Аскарьяна [1], В.И. Таланова [11], В.Н. Лугового и А.М. Прохорова [9]. Подробный обзор развития данного направления вплоть до 1995 г. представлен в книге А.В. Боровского и А.Л. Галкина [5].

НВУ, а также его упрощенное представление (нелинейное параболическое уравнение), не удается решить аналитическими методами. В связи с этим, особое значение приобретает разработка численных методов его решения. Решающий вклад в разработку численных методов исследования НВУ сделан А.Л. Галкиным [5], развившим спектральные методы, использующие приближение искомой функции полиномами Чебышева. Альтернативные численные методы для решения упрощенной модификации (параболического уравнения) были разработаны Н.С. Бахваловым, А.Б. Борисовым и Я.М. Жилейкиным [3]. Эти методы используют трехслойные разностные схемы с прямым учетом законов сохранения.

В данной статье приведен обзор спектральных методов решения НВУ, которые применены к решению НВУ с различными типами нелинейности, включая решение ЛВУ. Эти уравнения могут использоваться в различных областях науки, техники и экономики.

В самом общем виде *нелинейное волновое уравнение* имеет следующий математический вид

$$\left( \frac{1}{v_g} \partial_t + \partial_z \right) A + \frac{i}{2k} (\square + \hat{\Phi}(|A|^2)) A = 0, \quad (1)$$

где  $v_g$  — групповая скорость;  $A(r, x, t)$  — комплексная амплитуда распространяющейся волны;  $i$  — комплексная единица;  $k$  — волновое число;  $\square = \Delta_{\perp} + \partial_{zz}^2 - c^{-2} \partial_{zz}^2$  — волновой оператор (даламбертиан);  $\hat{\Phi}(|A|^2)$  — математический оператор, описывающий нелинейность среды.

Данный оператор может иметь алгебраический, дифференциальный или смешанный вид. В книге [7] рассматривается смешанный вид нелинейности среды

$$\hat{\Phi}(|A|^2) = k_p^2 \left[ 1 - \frac{(1 + k_p^{-2} \Delta \gamma)}{\gamma} \right], \quad \gamma = (1 + |A|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где  $k_p$  — константа среды;  $\Delta$  — лапласиан.

Если задана бесконечная среда  $-\infty < z < \infty$  и в момент времени  $t = 0$  определен импульс с известной формой, то удобной является следующая замена переменных, которая локализует решение

$$\xi = v_g t - z, \quad \tau = t. \quad (3)$$

Уравнения (1) и (2) принимают следующий вид:

$$\frac{1}{v_g} \partial_t A + \frac{i}{2k} (\Delta_{\perp} + \left(1 - \frac{v_g^2}{c^2}\right) \partial_{\xi\xi}^2 - \frac{2v_g}{c^2} \partial_{\xi\tau}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{\tau\tau}^2 + \hat{\Phi}(|A|^2)) A = 0; \quad (4)$$

$$\hat{\Phi}(|A|^2) = k_p^2 \left[ 1 - \frac{(1 + k_p^{-2} (\Delta_{\perp} \gamma + \partial_{\xi\xi}^2 \gamma))}{\gamma} \right], \quad \gamma = (1 + |A|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Преобразование (3) поворачивает полосу распространения излучения в плоскости  $z, t$  параллельно оси времени.

В постановку задачи для НВУ следует включить начальные

$$A(r, \xi, \tau) = A_0(r, \xi), \quad \partial_{\tau} A(r, \xi, \tau = 0) = A_1(r, \xi) \quad (6)$$

и граничные условия

$$A(r = \infty, \xi, \tau) = 0, \quad \partial_r A(r = 0, \xi, \tau) = 0, \quad A(r, \xi = \pm\infty, \tau) = 0. \quad (7)$$

В приближении медленности изменения комплексной амплитуды на расстояниях порядка длины волны вдоль направления распространения и на временах порядка периода осцилляции поля  $|\partial_z A|, c^{-1} |\partial_t A| \ll k|A|$ , волновой оператор и лапласиан следует заменить на поперечные лапласианы  $\square, \Delta \rightarrow \Delta_{\perp}$ . Получающееся уравнение классифицируют как нелинейное параболическое уравнение (часто в литературе его называют нелинейным уравнением Шредингера, сокращенно НУШ) и записывают таким образом:

$$\frac{1}{v_g} \partial_{\tau} A + \frac{i}{2k} (\Delta_{\perp} + \hat{\Phi}(|A|^2)) A = 0;$$

$$\hat{\Phi}(|A|^2) = k_p^2 \left[ 1 - \frac{(1 + k_p^{-2} \Delta_{\perp} \gamma)}{\gamma} \right], \quad \gamma = (1 + |A|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая сложность анализа НВУ (4)–(5) А.В. Боровский и А.Л. Галкин ввели в рассмотрение промежуточное уравнение, в котором были опущены скрещенная  $\partial_{\xi\tau}^2$  и вторая производные по времени  $\partial_{\tau\tau}^2$ , но учитывалась вторая производная по продольной координате  $\partial_{\xi\xi}^2$ . Такое уравнение было названо модифицированным НУШ [5].

Во всех типах задач задавался начальный волновой импульс в форме гипергауссовского веретена с начальным плоским фазовым фронтом.

Спектрально-разностный метод получил свое развитие в работах [4; 5; 7] применительно к нестационарным пространственно двумерным уравнениям в частных производных параболического, гиперболического, а также эллиптического типа.

Для задачи (4)–(7) построение численного алгоритма производится методом коллокации на основе представления искомых функций в виде конечных разложений по полиномам Чебышева 1-го рода

$$Y(s, t) = \sum_{p=0}^P y_p(t) T_p(s), \quad T_p(s) = \cos(p \cdot \arccos(s)). \quad (8)$$

В качестве переменной  $s$  в уравнении (8) может фигурировать любая из двух пространственных переменных задач, например:

$s_1 = (2r/R) - 1$  — для радиальной переменной на конечной области  $0 \leq r \leq R$ ;

$s_2 = (\xi - \xi_0) / (\xi + \xi_0)$  — для сопутствующей переменной на полубесконечной области  $0 \leq \xi < \infty$ ;

$s_3 = (\xi + \xi_0) / (\xi - \xi_0)$  — для сопутствующей переменной на полубесконечной области  $-\infty < \xi \leq 0$ ;

$s_4 = (2\xi / \xi_0) - 1$  — для сопутствующей переменной на конечной области  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ , где  $\xi = 0$  — координата переднего фронта импульса, согласно преобразованию (3);  $\xi_0$  — координата заднего фронта импульса.

По теории полиномов Чебышева точки коллокации определяются выражениями

$$s_l = \cos(\pi l / P), \quad l = 0, 1, \dots, P. \quad (9)$$

Значения функции  $Y(s, t)$  в точках коллокации (9) однозначно связаны с коэффициентами разложения  $y_p(t)$ :

$$Y_l(t) = Y(s_l, t) = \sum_{p=0}^P y_p(t) T_p(s_l);$$

$$y_p(t) = \frac{2d_p}{P} \sum_{l=0}^P d_l Y_l(t) \cos(\pi l p / P), \quad p = 0, 1, \dots, P; \quad (10)$$

$$d_0 = d_P = 1/2, \quad d_l = 1, \quad l = 1, 2, \dots, P - 1.$$

Подстановка представлений (8)–(10), выполненных для обеих пространственных переменных, например, для случая конечных областей  $0 \leq r \leq R$ ;  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  в уравнения (4)–(5) с учетом начальных и граничных условий и включения метода искусственного поглощения (МИП) на границах, приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени относительно значений искомых функций в точках коллокации:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_g} \frac{d}{dt} A_{lm} + \frac{i}{2k} \left\{ \left( 1 - \frac{v_g^2}{c^2} \right) \frac{1}{\xi_0^2} \sum_{p=1}^{P-1} Z2_{lp} A_{pm} + \frac{1}{r_m R} \sum_{q=1}^{Q-1} R1_{mq} A_{lq} + \right. \\ & + \frac{1}{R^2} \sum_{q=1}^{Q-1} R2_{mq} A_{lq} - \frac{2v_g}{c^2} \frac{1}{\xi_0} \sum_{p=1}^{P-1} Z1_{lp} \frac{d}{dt} A_{pm} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt^2} A_{lm} + \\ & + A_{lm} k_p^2 \left[ 1 - \frac{1}{\gamma_l} \max \left( 0; 1 + k_p^{-2} \left( \frac{1}{r_m R} \sum_{q=1}^{Q-1} R1_{mq} \gamma_{lq} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{R^2} \sum_{q=1}^{Q-1} R2_{mq} \gamma_{lq} + \frac{1}{\xi_0^2} \sum_{p=1}^{P-1} Z2_{lp} \gamma_{pm} \right) \right) \right] \left. \right\} + \frac{\chi_{lm}^-}{2} A_{lm} = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$l = 1, 2, \dots, P - 1; \quad m = 1, 2, \dots, Q - 1;$$

$$r_m = \frac{R}{2} (1 + \cos(\pi m / Q)), \quad \xi_l = \frac{\xi_0}{2} (1 + \cos(\pi l / P)).$$

Фигурирующие в выражении (11) матрицы определяются следующим образом:

$$R1_{lj} = AR1_{lj} = \frac{AR1_{lk} AR1_{kj}}{AR1_{kk}};$$

$$R2_{lj} = AR2_{lj} = \frac{AR2_{lk} AR1_{kj}}{AR1_{kk}};$$

$$Z1_{lj} = \sum_{n=0}^{P-1} \sum_{\substack{m=n+1 \\ m-n-\text{нечет}}}^P \frac{2md_m d_j}{f_n Q} \cos \frac{\pi m j}{P} \cos \frac{\pi l n}{P};$$

$$ZZ_{lj} = \sum_{n=0}^{P-2} \sum_{\substack{m=n+2 \\ m-n-\text{чет}}}^P \frac{m(m^2 - n^2)d_m d_j}{f_n P} \cos \frac{\pi m j}{P} \cos \frac{\pi l n}{P}; \quad (12)$$

$$AR1_{lj} = \sum_{n=0}^{Q-1} \sum_{\substack{m=n+1 \\ m-n-\text{нечет}}}^Q \frac{2m d_m d_j}{f_n Q} \cos \frac{\pi m j}{Q} \cos \frac{\pi l n}{Q};$$

$$AR2_{lj} = \sum_{n=0}^{Q-2} \sum_{\substack{m=n+2 \\ m-n-\text{чет}}}^Q \frac{m(m^2 - n^2)d_m d_j}{f_n Q} \cos \frac{\pi m j}{Q} \cos \frac{\pi l n}{Q};$$

$$f_n = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 1, & n \geq 1 \end{cases}.$$

В выражениях (12) непосредственно учитывается условие (7). При этом возникают небольшие отличия в разложениях по переменным  $r$  и  $\xi$ .

В качестве профиля искусственного поглощения использовалось следующее распределение:

$$\chi^-(r, \xi) = \chi_0^- \left[ \exp(-24(1 - r/R)) + \exp(-24(1 - \xi/\xi_0)) + \exp(-24(\xi/\xi_0)) \right];$$

$$\chi_0^- = 1000, \quad \chi_{lm}^- = \chi^-(r_m, \xi_l).$$

Система ОДУ (11)–(12) применялась, во-первых, для решения НУШ и, во-вторых, модифицированного НУШ. Решение для НУШ при этом совпало с высокой степенью точности с решением, полученным альтернативным методом Бахвалова–Жилейкина [10]. Система ОДУ решалась по времени при помощи разностной схемы Адамса–Бэшфорда 2-го порядка точности. Решение модифицированного НУШ сводится к учету второй производной по координате  $\partial_{\xi\xi}^2$  и в более сложном варианте смешанной производной  $\partial_{\xi\tau}^2$ . Спектрально-разностная методика решения задачи при этом усложняется незначительно.

Переход к решению НВУ, т.е. учет второй производной по времени  $\partial_{\tau\tau}^2$ , принципиально усложняет задачу. Возникающее отражение волн от границы конечной области введением искусственного поглощения погасить не удается.

Проблема решается переходом к рассмотрению задачи на полубесконечной области по радиусу  $0 \leq r < \infty$  и на двусторонне бесконечной области по сопутствующей координате  $-\infty \leq \xi < \infty$ . По переменной  $\xi$  задачу следует рассматривать на двух полубесконечных областях. Первая область — с отрицательными координатами, вторая — с положительными. Безразмерные переменные для этих областей вводятся следующим образом:

$$s_1 = (r - R) / (r + R);$$

$$s_2 = (\xi - \xi_0) / (\xi + \xi_0);$$

$$s_3 = (\xi + \xi_0) / (\xi - \xi_0).$$

Далее для каждой из двух указанных областей получаем свою систему ОДУ типа (11)–(12). На границе между двумя областями нужно применить условия сшивки решений. Ими могут быть условия непрерывности решения и его первой производной по  $\xi$ . Узлы коллокационной сетки сгущаются к точке  $\xi = 0$ , что позволяет описать такой тонкий эффект как формирование предвестника при распространении основной волны. Указанный метод решения задачи позволяет отказаться от применения искусственного поглощения.

Отметим, что алгоритмы, основанные на разбиении области интегрирования на геометрически более простые подобласти с применением спектрально-разностного метода в каждой из них и сшивке получающихся решений, применялись ранее при решении систем уравнений эллиптического типа [4].

Как уже упоминалось, усложнением задачи вследствие перехода к решению НВУ является необходимость построения экономичной разностной схемы для решения системы ОДУ второго порядка типа (11)–(12). Заменой первых производных система ОДУ (11) второго порядка редуцируется в систему первого порядка с удвоенным числом уравнений. Как показал А.Л. Галкин [7], для численного решения последней оптимальной является разностная схема типа предиктор-корректор. В качестве предиктора удобно применять схему Адамса–Бэшфорта второго порядка точности

$$\frac{du}{dt} = F(u); \quad u^{n+1,0} = u^n + \Delta t \left[ 3/2 F(u^n) - 1/2 F(u^{n-1}) \right]$$

и корректора — неявную схему второго порядка точности, решаемую методом простой итерации:

$$u^{n+1, m+1} = u^n + \Delta t F((u^{n+1, m} + u^n)/2), \quad m \geq 0.$$

Таким образом, для ряда приложений в сфере науки и техники представляет интерес изучение решений нелинейного волнового уравнения (1)–(2). При переходе к сопутствующей переменной с целью пространственной локализации решения уравнений (1)–(2) принимает вид выражений (4)–(5). Для уравнений (4)–(5), начиная с работ В.И. Таланова, В.Н. Лугового и А.М. Прохорова, классическим является приближение медленных комплексных амплитуд волнового поля. В рамках этого приближения следует опустить все производные второго порядка  $\partial_{\xi\xi}^2$ ,  $\partial_{\xi\tau}^2$ ,  $\partial_{\tau\tau}^2$ , что приводит к НУШ. Возможны также более сложные приближения. Уравнение, в котором оставлена производная  $\partial_{\xi\xi}^2$ , но опущены производные  $\partial_{\xi\tau}^2$ ,  $\partial_{\tau\tau}^2$ , называют модифицированным НУШ. Можно также рассмотреть вариант уравнения, в котором исключена производная  $\partial_{\tau\tau}^2$ , но оставлены две другие. Получающееся уравнение классифицируется как модифицированное НУШ со скрещенной производной. Наибольший интерес представляет рассмотрение точного НВУ. В каждой модели можно рассматривать различные нелинейности. Численные решения разнообразных вариантов задач рассмотрены подробно в докторских диссертациях [6; 7].

Общие выводы следующие:

1. Широкий волновой импульс типа продолговатого веретена испытывает динамическое самоканалирование, т.е. схлопывается в узкий канал, диаметр которого составляет размер порядка длины волны. Интенсивности излучения при этом возрастают как отношения поперечных площадей импульса.

2. После процесса самоканалирования возникает существенная асимметрия импульса по продольной координате, создаваемая скрещенной производной.

3. Асимметрия волнового поля приводит к возникновению сильной временной (продольной) самомодуляции схлопнувшегося импульса, который распадается на несколько устойчивых пространственно двумерных солитонов. Эти солитоны находятся близко друг от друга и взаимодействуют между собой. Между ними возникает перекачка энергии.

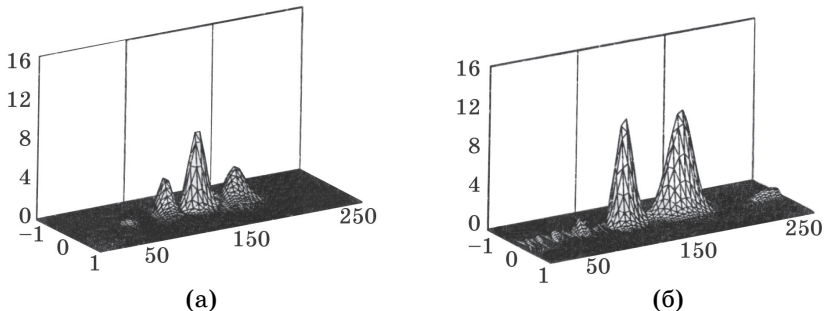
4. На движение совокупности солитонов накладывается пульсация, обусловленная нелинейностью  $\gamma$ -фактора (релятивистская нелинейность



в физике). Интенсивность схлопнувшегося импульса то возрастает, то убывает.

5. С течением непродолжительного времени у волнового импульса возникает предвестник. Часть энергии волнового поля уходит вперед, опережая основной импульс. Импульс в связи с этим имеет тенденцию к растягиванию по продольной координате. Обнаруженный эффект имеет чисто волновую природу и отсутствует в модели НУШ.

Отметим, что в последнее время отдельными исследователями проводилось численное моделирование нелинейного распространения волновых импульсов в плазменных средах с использованием РС-кодов [15; 17; 18]. В этих расчетах наблюдается эффект самофокусировки импульсов, а также их релятивистские пульсации. Иногда отмечается образование кавитационных полостей, обусловленных стрикционным механизмом. Эти эффекты были впервые установлены в начале 90-х гг. XX в., подробнее смотри [5; 6; 7]. Вместе с тем, из-за чрезвычайной громоздкости РС-кодов полную картину взаимодействия волнового импульса с плазмой авторам [15; 17; 18] рассчитать не удается. Использование НВУ с релятивистско-стрикционной нелинейностью (1)–(2) обладает большим преимуществом по сравнению с РС-кодами. Данное уравнение можно численно исследовать на длительных интервалах времени и установить качественно полную картину нелинейного поведения волнового импульса.



*Решение НВУ (1)–(2) спектральным методом. Образование трех (а) и двух (б) солитонов из веретенообразного исходного волнового импульса в процессе его самоканалирования. Единица в горизонтальной плоскости соответствует длине 1 мкм. Единица в вертикальной плоскости соответствует интенсивности  $10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>*

### Список использованной литературы

1. Аскарьян Г.А. Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы / Г.А. Аскарьян // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1962. — Т. 42, № 6. — С. 1567–1570.
2. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М.: Наука, 1973. — 720 с.
3. Борисов А.Б., Боровский А.В., Коробкин В.В. [и др.] // Известия АН СССР. Сер. Физика. — 1991. — Т. 55. — С. 1245.
4. Боровский А.В. Методы совместного решения уравнений газовой динамики и кинетики многозарядной плазмы / А.В. Боровский, А.Л. Галкин, В.Г. Приймак, Е.В. Чижонков // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, № 9. — С. 1381–1393.
5. Боровский А.В. Лазерная физика / А.В. Боровский, А.Л. Галкин. — М.: Изд-во атомной техники, 1996. — 496 с.
6. Боровский А.В. Самоканалирование ультракоротких мощных лазерных импульсов в веществе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.В. Боровский. — М., 1995. — 327 с.

7. Галкин А.Л. Многомерные задачи переноса излучения в лазерной физике высоких интенсивностей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.Л. Галкин. — М., 1997. — 320 с.
8. Зоммерфельд А. Оптика / А. Зоммерфельд. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1953. — 486 с.
9. Луговой В.Н. Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде / В.Н. Луговой, А.М. Прохоров // Успехи физических наук. — 1973. — Т. 111. — С. 203–247.
10. Нелинейное распространение ультракоротких мощных лазерных импульсов в веществе / А.В. Боровский, А.Л. Галкин, Я.М. Жилейкин [и др.]. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — 60 с.
11. Таланов В.И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах / В.И. Таланов // Письма в ЖЭТФ. — 1965. — Т. 2. — С. 218.
12. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн / В.А. Фок. — М.: Наука, 1970. — 140 с.
13. Франк Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики / Ф. Франк, Р. Мизес. — М.-Л.: ОНТИ, 1937. — 998 с.
14. Green G. Mathematical papers of the late / G. Green. — London: Ferrers, 1871. — 126 p.
15. Kalmykov S. Electron Self-Injection and Trapping into an Evolving Plasma Bubble / S. Kalmykov, S.A. Yi, V. Khudik, G. Shvets // Phys. Rev. — Lett. 103. — 135004 (2009).
16. Kirchhoff G. Ann.d.physik / G.Kirchhoff. — 1883. — No 18. — P. 663.
17. Kostyukov I. Kinetic modeling of wakefield generation in ultrahigh intensity laser-plasma interaction/ Second International Workshop & Summer School on Plasma Physics 2006 IOP Publishing/Journal of Physics: Conference Series / I. Kostyukov — URL: 012016 doi:10.1088/1742-6596/63/1/012016.
18. Kostyukov I. Relativistic Electron Dynamics in Strongly-Nonlinear Regime of Laser Plasma Interaction / I. Kostyukov // 31st EPS Conference on Plasma Phys. — London, 28 June–2 July 2004 ECA. — Vol. 28G. — P. 49.
19. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction / A. Sommerfeld // Mathematische Annalen. — 1896. — Vol. 47. — P. 317–374.

### References

1. Askar'yan G.A. Vozdeistvie gradienta polya intensivnogo elektromagnitnogo luchu na elektrony i atomy / G.A. Askar'yan // Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki. — 1962. — Т. 42, № 6. — С. 1567–1570.
2. Born M. Osnovy optiki / M. Born, E. Vol'f. — М.: Nauka, 1973. — 720 с.
3. Borisov A.B., Borovskii A.V., Korobkin V.V. [i dr.] // Izvestiya AN SSSR. Ser. Fizika. — 1991. — Т. 55. — С. 1245.
4. Borovskii A.V. Metody sovместnogo resheniya uravnenii gazovoi dinamiki i kinetiki mnogozaryadnoi plazmy / A.V. Borovskii, A.L. Galkin, V.G. Priimak, E.V. Chizhonkov // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1990. — Т. 30, № 9. — С. 1381–1393.
5. Borovskii A.V. Lazernaya fizika / A.V. Borovskii, A.L. Galkin. — М.: Изд-во atomnoi tekhniki, 1996. — 496 с.
6. Borovskii A.V. Samokanalirovanie ul'trakorotkikh moshchnykh lazernykh impul'sov v veshchestve: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.В. Боровский. — М., 1995. — 327 с.
7. Galkin A.L. Mnogomernye zadachi perenosа izlucheniya v lazernoi fizike vysokikh intensivnosti: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.Л. Галкин. — М., 1997. — 320 с.
8. Zommerfel'd A. Optika / A. Zommerfel'd. — М.: Изд-во inostrannoi literatury, 1953. — 486 с.
9. Lugovoi V.N. Teoriya rasprostraneniya moshchnogo lazernogo izlucheniya v nelineinoy srede / V.N. Lugovoi, A.M. Prokhorov // Uspekhi fizicheskikh nauk. — 1973. — Т. 111. — С. 203–247.
10. Nelineinoe rasprostraneniye ul'trakorotkikh moshchnykh lazernykh impul'sov v veshchestve / A.V. Borovskii, A.L. Galkin, Ya.M. Zhileikin [i dr.]. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — 60 с.



11. Talanov V.I. O samofokusirovke volnovykh puchkov v nelineinykh sredakh / V.I. Talanov // Pis'ma v ZhETF. — 1965. — Т. 2. — S. 218.
12. Fok V.A. Problemy difraktsii i rasprostraneniya elektromagnitnykh voln / V.A. Fok. — M.: Nauka, 1970. — 140 s.
13. Frank F. Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoi fiziki / F. Frank, R. Mizes. — M.-L.: ONTI, 1937. — 998 s.
14. Green G. Mathematical papers of the late / G. Green. — London: Ferrers, 1871. — 126 p.
15. Kalmykov S. Electron Self-Injection and Trapping into an Evolving Plasma Bubble / S. Kalmykov, S.A. Yi, V. Khudik, G. Shvets // Phys. Rev. — Lett. 103. — 135004 (2009).
16. Kirchhoff G. Ann.d.physik / G.Kirchhoff. — 1883. — No 18. — P. 663.
17. Kostyukov I. Kinetic modeling of wakefield generation in ultrahigh intensity laser-plasma interaction/ Second International Workshop & Summer School on Plasma Physics 2006 IOP Publishing/Journal of Physics: Conference Series / I. Kostyukov — URL: 012016 doi:10.1088/1742-6596/63/1/012016.
18. Kostyukov I. Relativistic Electron Dynamics in Strongly-Nonlinear Regime of Laser Plasma Interaction / I. Kostyukov // 31st EPS Conference on Plasma Phys. — London, 28 June–2 July 2004 ECA. — Vol. 28G. — P. 49.
19. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction / A. Sommerfeld // Mathematische Annalen. — 1896. — Vol. 47. — P. 317–374.

### **Информация об авторе**

*Боровский Андрей Викторович* — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

### **Author**

*Borovsky Andrey Victorovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.